PROBLEMA RESUELTO 2

El caño de una fuente está inclinado 60° sobre la horizontal. Si el agua sale del caño con una velocidad inicial de 10 m/s:

a) ¿Qué dibujo forma el chorro de agua?

b) ¿Qué altura máxima alcanza el agua?

c) ¿A qué distancia del caño hay que colocar el sumidero?

d) ¿Cuál es el módulo de la velocidad del agua cuando esta cae al sumidero?

Planteamiento y resolución

Fijamos el sistema de referencia del problema con origen en el caño, direcciones vertical y horizontal y sentidos hacia arriba y según el avance del movimiento. Entonces, en las unidades del SI $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(v_{0x}, v_{0y}) = (10 \cdot \cos 60°, 10 \cdot \text{sen } 60°) = (5, 8{,}67)$, y la aceleración de la gravedad tiene solo componente vertical con sentido negativo.

a) El chorro dibuja en el aire una parábola.

b) Para calcular la altura máxima hay que fijarse en la componente vertical del movimiento. Como la componente vertical de la velocidad en ese punto es cero, el tiempo que tarda en alcanzar ese punto es:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t \rightarrow 0 = 8{,}67 \text{ m/s} - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t \rightarrow t = 0{,}88 \text{ s}$$

En ese tiempo el agua sube hasta una altura:

$$y = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = 0 + 8{,}67 \text{ m/s} \cdot 0{,}88 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}88^2 \text{ s}^2 = 3{,}8 \text{ m}$$

c) Durante su trayectoria el agua avanza en horizontal un espacio:

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t \rightarrow 18 \text{ m} = 0 + 5 \text{ m/s} \cdot 0{,}88 \text{ s} = 4{,}4 \text{ m}$$

Si no queremos que el agua caiga sobre el suelo, sino que queremos recogerla para reciclarla, el sumidero debe estar a 4 m y 40 cm del caño.

d) La componente horizontal de la velocidad no cambia durante su movimiento, y la componente vertical de la velocidad final es igual, pero de sentido contrario a la componente vertical de la velocidad inicial. Por tanto, la velocidad final es:

$$(v_{fx}, v_{fy}) = (5, -8{,}67) \text{ m/s}$$

Y su módulo coincide con el de la velocidad inicial: 10 m/s.

ACTIVIDADES

1 **Una esquiadora realiza un salto en una arista inclinada 25° sobre la horizontal y con un desnivel de 10 m. Si la velocidad con la que empieza el vuelo es 20 m/s, calcula la altura máxima alcanzada y el punto del impacto.**

Sol.: 3,65 m;
45,86 m.

2 **Un niño deja caer un coche por el borde de una mesa de 70 cm de altura después de empujarlo sobre ella con una velocidad de 30 cm/s. ¿A qué distancia de la mesa cae el coche?**

Sol.: 11,4 cm.

3 **Una estudiante se monta en una montaña rusa con varias vueltas completas. Cuando su coche empieza la primera vuelta y a 20 m del suelo se inclina 100° sobre la horizontal, se le caen las llaves del bolsillo de la camisa. Si la velocidad en ese momento es de 15 m/s, ¿a qué distancia de ese punto tendrá que buscar las llaves?**

Sol.: 10,5 m.

4 **¿Cuánto tiempo dura la caída desde el trampolín, de 10 m, de los nadadores de alta competición que se elevan hasta tres metros por encima del trampolín en su salto?**

Sol.: 2,41 s.

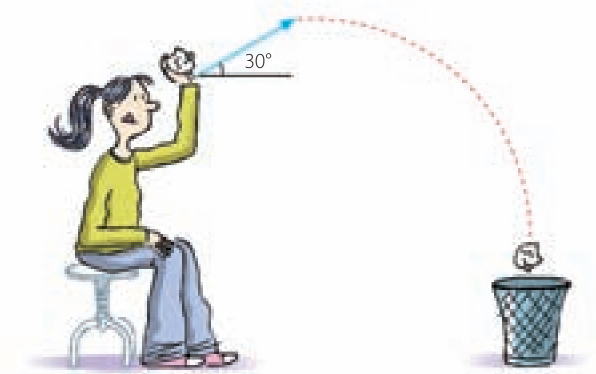
NOMBRE: ______________ CURSO: ________ FECHA: ________

5. EJERCICIO RESUELTO

Laura, que está aburrida en su casa, se entretiene lanzando bolas de papel a la papelera. Efectúa los lanzamientos con una velocidad inicial de 2 m/s y un ángulo de 30° sobre la horizontal. Si la altura desde la que lanza es de 1 m y 15 cm:

a) ¿Dónde debe estar situada la papelera para que Laura enceste sus lanzamientos, suponiendo que la altura de la papelera es de 50 cm y su diámetro es de 20 cm?

b) ¿Con qué velocidad entrará la bola en la papelera?



SOLUCIÓN

Fijamos el sistema de referencia del problema con origen en los pies de Laura, direcciones vertical y horizontal y sentidos hacia arriba y según el avance del movimiento.

Entonces, en el SI de unidades:

$$(x_0\ ,\ y_0) = (0\ ,\ 1{,}15);\ (v_{0x}\ ,\ v_{0y}) = (2 \cdot \cos 30°\ ,\ 2 \cdot \text{sen } 30°) = (1{,}73\ ,\ 1)$$

Y la aceleración de la gravedad tiene solo componente vertical con sentido negativo.

a) Calculamos el tiempo que tarda en llegar la bola a la papelera fijándonos en la componente vertical, que sigue un movimiento uniformemente acelerado. La bola alcanza la altura del borde de la papelera, $y = 0{,}5$ m, en un tiempo t:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow 0{,}5 \text{ m} = 1{,}15 \text{ m} + 1 \text{ m/s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4{,}9 \cdot t^2 - t - 0{,}65 = 0 \rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot (-0{,}65)}}{2 \cdot 4{,}9}$$

La solución positiva es $t = 0{,}48$ s. En ese tiempo la bola se traslada horizontalmente con movimiento uniforme una distancia:

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t \rightarrow x = 0 \text{ m} + 1{,}73 \text{ m/s} \cdot 0{,}48 \text{ s} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 0{,}83 \text{ m} = 83 \text{ cm}$$

Como el diámetro de la papelera es de 20 cm, la papelera (el punto más cercano a Laura) puede estar a una distancia de Laura desde 63 cm hasta 83 cm.

b) Para determinar el vector velocidad del momento de llegada hay que calcular cada una de sus componentes.

La componente horizontal es $v_x = 1{,}73$ m/s porque el movimiento en esa dirección es uniforme y la velocidad permanece constante.

La componente vertical se calcula recordando que en esa dirección el movimiento es uniformemente acelerado:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t = 1 \text{ m/s} - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}48 \text{ s} = -3{,}70 \text{ m/s (signo negativo porque la bola cae).}$$

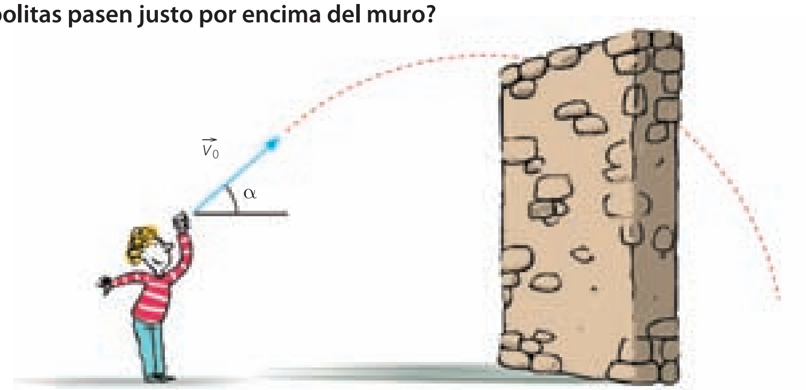
Por tanto:

$$\vec{v} = (1{,}73\ ,\ -3{,}70) \text{ m/s} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{1{,}73^2 + (-3{,}70)^2} = 4{,}08 \text{ m/s}$$

TIRO PARABÓLICO

NOMBRE: ______________ CURSO: ______________ FECHA: ______________

17 **Un niño juega a lanzar bolitas de papel por encima de un muro de 3 m de alto. Si el niño lanza desde 1 m de altura con una velocidad de 10 m/s y está situado a 4 m del muro, ¿con qué ángulo debe lanzar para que las bolitas pasen justo por encima del muro?**



SOLUCIÓN

El sistema de referencia se fija en el suelo a los pies del niño.

Entonces la altura inicial de la bolita de papel es $y_0 = 1$ m, el muro está en $x_1 = 4$ m y se busca un ángulo inicial de lanzamiento, α, que asegure que la bolita supera la altura del muro: $y_1 = 3$ m.

La componente horizontal del movimiento de la bolita de papel es un movimiento uniforme con velocidad:

$$v_{0x} = v \cdot \cos\alpha = 10 \text{ m/s} \cdot \cos\alpha$$

Entonces:

$$x_1 = x_0 + v_{0x} \cdot t \rightarrow 4 \text{ m} = 0 + 10 \text{ m/s} \cdot \cos\alpha \cdot t$$

Despejamos el tiempo (en segundos) que tarda la bolita de papel en llegar al muro en función del ángulo de lanzamiento:

$$t = \frac{2}{5 \cdot \cos\alpha}$$

La componente vertical del movimiento de la bolita de papel es un movimiento uniformemente acelerado con velocidad inicial $v_{0y} = v_y \cdot \text{sen}\,\alpha = 10 \cdot \text{sen}\,\alpha$, y con la aceleración de la gravedad contraria al sentido positivo de la referencia:

$$y_1 = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 \text{ m} = 1 \text{ m} + 10 \text{ m/s} \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

Sustituyendo el tiempo que tarda la piedra en llegar:

$$3 = 1 + 10 \cdot \frac{2 \cdot \text{sen}\,\alpha}{5 \cdot \cos\alpha} \cdot t - 4{,}9 \cdot \frac{4}{25 \cdot \cos^2\alpha}$$

Y como:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\,\alpha$$

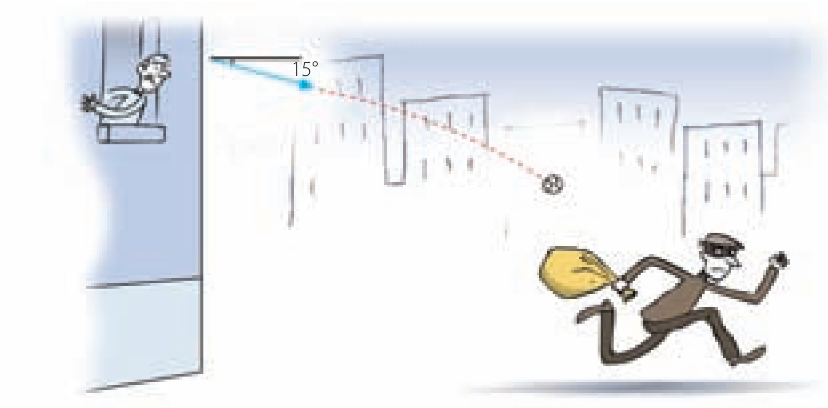
Se tiene:

$$0 = -2 + 4 \cdot \text{tg}\,\alpha - 0{,}784 \cdot (1 + \text{tg}^2\,\alpha) \rightarrow 0{,}784 \cdot \text{tg}^2\,\alpha - 4 \cdot \text{tg}\,\alpha + 2{,}784 = 0$$

Las dos soluciones de la ecuación son los valores para la tangente del ángulo 0,83 y 4,27, que corresponden a los ángulos de 39° 42′ y 76° 49′. Para esos ángulos de lanzamiento la bolita de papel pasa justo por encima del muro. Para ángulos situados entre ellos (40° $\leq \alpha \leq$ 77°) la bolita supera con holgura el obstáculo.

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

18 **Desde la ventana de su casa Luis ve cómo un ladrón se aleja corriendo a una velocidad de 2 m/s. Dispuesto a detenerlo como sea, agarra una pelota de béisbol y la lanza hacia abajo con un ángulo de 15° bajo la horizontal en el instante en que el ladrón está a 10 m de la base de su casa. ¿Qué velocidad debe dar Luis a la pelota para que impacte en la cabeza del ladrón? Datos: altura del ladrón: 180 cm; altura a la que está la ventana de Luis: 15 m.**



SOLUCIÓN

Consideramos como instante inicial, $t_0 = 0$ s, el momento en que Luis lanza la pelota de béisbol, y llamaremos t_1 al momento en que la pelota impacta en la cabeza del ladrón. En ese tiempo t_1 el ladrón habrá recorrido con velocidad constante de 2 m/s una distancia de $(2\,t_1)$ m y estará alejado de la casa un total de $(10 + 2\,t_1)$ m.

En el sistema de referencia fijado al pie de la casa la pelota de béisbol tiene componente para el vector de posición inicial: $x_0 = 0$ m, $y_0 = 15$ m; y componentes para el vector de posición final:

$$x_1 = (12 + 2\,t_1)\text{ m};\ y_1 = 1{,}8\text{ m}$$

Además, las componentes del vector velocidad son:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos 15°;\ \ v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen } 15°$$

Como la componente horizontal del movimiento de la pelota es uniforme:

$$x_1 = x_0 + v_{0x} \cdot t_1 \rightarrow 12 + 2\,t_1 = 0 + v_0 \cdot \cos 15° \cdot t_1$$

Además, la componente vertical del movimiento es uniformemente acelerado con la aceleración de la gravedad en sentido negativo:

$$y_1 = y_0 + v_{0y} \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \rightarrow 1{,}8 = 15 + v_0 \cdot \text{sen } 15° \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t_1^2$$

Tenemos, pues, dos ecuaciones para calcular las incógnitas t_1 y v_0:

$$\left.\begin{aligned} 12 &= (0{,}97 \cdot v_0 - 2) \cdot t_1 \\ 13{,}2 &= -0{,}26 \cdot v_0 \cdot t_1 + 4{,}9 \cdot t_1^2 \end{aligned}\right\}$$

Despejando en la primera ecuación el tiempo y sustituyendo en la otra se obtiene una ecuación para la velocidad de lanzamiento:

$$13{,}2 = -0{,}26 \cdot v_0 \cdot \frac{12}{0{,}97 \cdot v_0 - 2} + 4{,}9 \cdot \frac{144}{(0{,}97 \cdot v_0 - 2)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 13{,}2 \cdot (0{,}97 \cdot v_0 - 2)^2 + 0{,}26 \cdot v_0 \cdot 12 \cdot (0{,}97 \cdot v_0 - 2) - 4{,}9 \cdot 144 = 0 \rightarrow$$

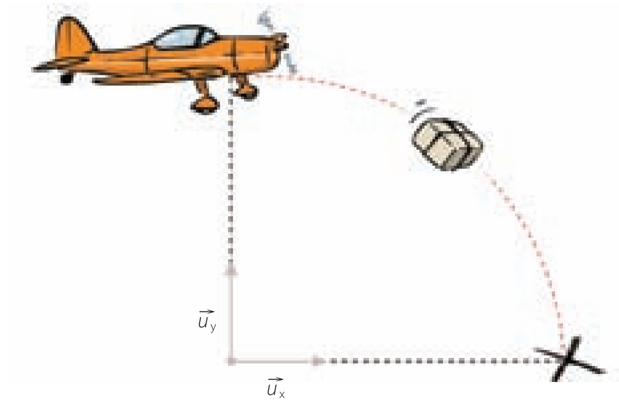
$$\rightarrow 15{,}45 \cdot v_0^2 + 2{,}33 \cdot v_0 - 652{,}8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow v_0 = \frac{-2{,}33 \pm \sqrt{2{,}33^2 - 4 \cdot 15{,}45 \cdot (-652{,}8)}}{2 \cdot 15{,}45}$$

La solución negativa se descarta; por tanto, Luis debe lanzar la pelota con velocidad inicial de 6,43 m/s^2.

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

19 **Una avioneta vuela a 500 m de altura con una velocidad de 130 m/s. ¿A qué distancia en horizontal de una marca dibujada en el suelo debe soltar un paquete para que este caiga exactamente sobre la marca?**



SOLUCIÓN

El sistema de referencia se fija en el suelo en el punto en el que se suelta el paquete. Así, las coordenadas de la posición inicial del móvil son $x_0 = 4$ m, $y_0 = 500$ m. Además, como el paquete se deja caer, su velocidad de lanzamiento coincide con la de la avioneta: $v_{0x} = 130$ m/s; $v_{0y} = 0$ m/s.

El movimiento vertical es uniformemente acelerado con la aceleración de la gravedad con sentido negativo:

$$y_1 = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow 0 = 500 \text{ m} + 0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

Así que tarda 10,10 s en caer. Y en ese tiempo el paquete avanza horizontalmente con movimiento uniforme un espacio:

$$x_1 = x_0 + v_{0x} \cdot t \rightarrow x_1 = 0 + 130 \text{ m/s} \cdot 10{,}10 \text{ s} \rightarrow x_1 = 1313 \text{ m}$$

El paquete debe lanzarse cuando la vertical de la avioneta esté a 1313 m del objetivo.

20 **Una atleta de élite lanza la jabalina con un ángulo de 45° alcanzando la marca de 70 m de distancia al punto de lanzamiento.**

SOLUCIÓN

a) ¿Cuál fue la velocidad de salida de la jabalina?

La atleta tiene un buen conocimiento del tiro parabólico y lanza la jabalina con el ángulo de máximo alcance. La diferencia entre un recorrido mayor o menor la da la velocidad inicial que confiere la atleta a la jabalina.

Suponemos que la atleta se inclina para arrojar la jabalina de manera que esta sale prácticamente del suelo, $x_0 = 0$ m, $y_0 = 0$. Además, la jabalina se clava en la marca de 70 m, $x_1 = 70$ m, $y_1 = 0$ m. La velocidad inicial se reparte igualmente entre sus componentes, puesto que el ángulo de salida es 45°:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos 45° = 0{,}71 \cdot v_0$$
$$v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen } 45° = 0{,}71 \cdot v_0$$

Entonces se pueden utilizar las ecuaciones de la componente horizontal, de movimiento uniforme, para despejar el tiempo en función de la velocidad inicial:

$$x_1 = x_0 + v_{0x} \cdot t \rightarrow 70 \text{ m} = 0 \text{ m} + 0{,}71 \cdot v_0 \cdot t \rightarrow t = \frac{70 \text{ m}}{0{,}71 \cdot v_0}$$

Y sustituir en las ecuaciones para la componente vertical:

$$y_1 = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow 0 = 0 + 0{,}71 \cdot v_0 \cdot \underbrace{\frac{70}{0{,}71 \cdot v_0}}_{t} - 4{,}9 \cdot \underbrace{\frac{70^2}{(0{,}71 \cdot v_0)^2}}_{t^2} \rightarrow 70 = 4{,}9 \cdot \frac{70^2}{0{,}71^2 \cdot v_0^2}$$

Y obtener así la velocidad de salida de la jabalina, $v_0 = 26{,}08$ m/s.

continúa →

NOMBRE: CURSO: FECHA:

b) ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada?

La altura máxima se alcanza en el momento en que la componente vertical de la velocidad se anula:

$$v = v_{0y} - g \cdot t \rightarrow 0 = 0{,}71 \cdot 26{,}08 \text{ m/s} - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t \rightarrow$$
$$\rightarrow t = 1{,}88 \text{ s}$$

En ese instante, la altura alcanzada es:

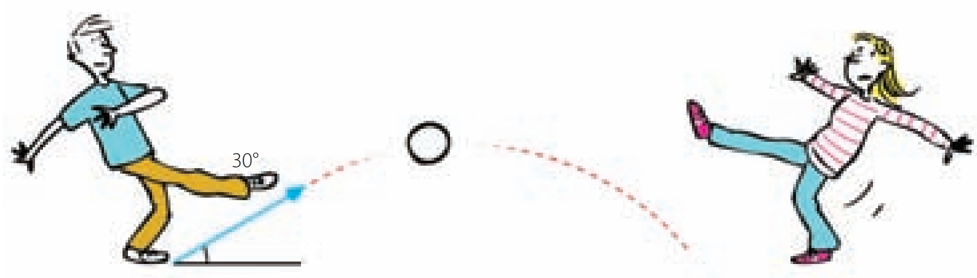
$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow y = 0 + 0{,}71 \cdot 26{,}08 \text{ m/s} \cdot 1{,}88 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}88^2 \text{ s}^2 = 17{,}49 \text{ m}$$

c) ¿Cuánto tardó en caer al suelo?

Como el movimiento es simétrico, tarda el doble de tiempo en caer al suelo que en alcanzar la altura máxima, es decir, 3,76 s.

21 **Mario golpea el balón con el pie para lanzárselo a Tamara que está situada a 18 m de distancia. El ángulo de salida del balón es de 30° sobre la horizontal y la velocidad a la que sale el balón de la bota de Mario es de 15 m/s. ¿A qué altura deberá poner el pie Tamara para hacer el control de la pelota que le envía Mario?**

SOLUCIÓN



Fijamos el sistema de referencia en el pie de Mario. El vector posición inicial del balón es $(x_0, y_0) = (0, 0)$ m, y del vector de posición final solo conocemos la componente horizontal $x_1 = 18$ m.

El vector velocidad inicial se calcula a partir del módulo y del ángulo de lanzamiento:

$$(v_{0x}, v_{0y}) = (15 \cdot \cos 30°, 15 \cdot \text{sen } 30°) = (13{,}0, 7{,}5) \text{ m/s}$$

Para averiguar la altura a la que llega el balón calculamos primero el tiempo que tarda en llegar a Tamara.

La componente horizontal de movimiento tiene velocidad constante $v_{0x} = 13{,}0$ m/s:

$$x_1 = x_0 + v_{0x} \cdot t \rightarrow 18 \text{ m} = 0 + 13{,}0 \text{ m/s} \cdot t \rightarrow t = 1{,}38 \text{ s}$$

La componente vertical del movimiento es uniformemente acelerada con aceleración en sentido negativo en el sistema de referencia elegido:

$$y_1 = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow y_1 = 0 + 7{,}5 \text{ m/s} \cdot 1{,}38 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}38^2 \text{ s} \rightarrow y_1 = 1{,}02 \text{ m}$$

Tamara tiene que elevar el pie hasta 1 m y 2 cm de altura.